

§9. Náhodné pokusy a náhodné jevy

Pozn.: Pokusem rozumíme jednorázové uskutečnění pevně stanovených definičních podmínek. Rozlišujeme 2 druhy pokusů:

1. Determinovaný: za určitých podmínek lze jednoznačně předpovědět výsledek pokusů.
2. Náhodný: výsledek není jednoznačně určen podmínkami, za kterých pokusy probíhají a můžeme je mnohokrát opakovat.

Def.: Náhodným jevem budeme rozumět jakékoliv tvrzení o výsledku náhodného pokusu, o kterém mohu po provedení pokusu říct, zda je nebo není pravdivé.

Pozn.:

- a) Protože jev chápeme jako předpověď výsledku nějakého pokusu, můžeme tyto předpovědi různě kombinovat, spojovat logickými spojkami, negovat, apod.
- b) Jevy budeme označovat $A, B, \dots$
- c) Jevy můžeme také chápat jako možné výsledky náhodného pokusu.
- d) Přesnější zavedení:
Základním prostorem rozumíme neprázdnou množinu Ω .
Možnými výsledky jednorázového pokusu jsou prvky ω z množiny Ω .
Třidu $\mathcal{A}$ podmnožin Ω nazveme jevovým polem (na Ω). Podmnožiny A náležící do jevového pole $\mathcal{A}$ nazveme jevy.

Def.: Necht' A, B jsou jevy.

- a) Řekneme, že jev A má za důsledek jev B (jev A implikuje jev B) (zapisujeme $A \subseteq B$), právě tehdy když jev B nastane vždy, když nastane jev A .
- b) Řekneme, že jevy A a B jsou si rovny (zapisujeme $A = B$), právě když $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$, tedy jev B nastane právě tehdy když nastane A .
- c) Jev, který nastane při každé realizaci pokusu, nazveme jevem jistým (označujeme Ω). Jev, který nemůže nikdy nastat, nazveme jev nemožný (označujeme $\emptyset$).

Def.: Necht' $A_1, A_2, \dots, A_n$ jsou jevy. Pak definujeme:

- a) Jev A je sjednocením jevů $A_1, A_2, \dots, A_n$ (zápis $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$):
 A je jev, který nastane právě tehdy, když nastane alespoň jeden z jevů $A_1, A_2, \dots, A_n$.
- b) Jev A je průnikem jevů $A_1, A_2, \dots, A_n$ (zápis $A = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^n A_i$):
 A je jev, který nastane právě tehdy, když společně nastanou jevy $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Def.: Necht' A, B jsou jevy

- a) Opačným (komplementárním, doplňkovým) jevem k jevu A nazýváme jev $\bar{A}$, který nastane právě tehdy, když nenastane jev A .
- b) Rozdílem (rozdělením) jevů A, B (v tomto pořadí) nazýváme jev $A - B$, který nastane právě tehdy, když nastane jev A a nenastane jev B .

Pozn.: Zřejmě platí

- a) $\overline{\emptyset} = \Omega$; $\overline{\Omega} = \emptyset$
- b) $A \cup \overline{A} = \Omega$; $A \cap \overline{A} = \emptyset$
- c) $A - B = A \cap \overline{B}$

Def.: Jevy A, B nazveme neslučitelné (disjunktní), právě tehdy když $A \cap B = \emptyset$.

Def.: Necht' je dán nějaký náhodný pokus. Jev A nazveme elementárním jevem, právě tehdy když neexistují žádné 2 jevy B, C , $A \neq B \neq C$ takové, že $A = B \cup C$, tj. jev A nelze vyjádřit jako sjednocení 2 jevů různých od A .

Množinu všech elementárních jevů nazveme jevovým polem (prostorem elementárních jevů). Je to množina všech možných elementárních výsledků daného náhodného pokusu. Označujeme ho Ω .

Pozn.: Každý náhodný jev lze chápat jako podmnožinu jevového pole Ω . Tedy operace s jevy převádíme na operace s množinami. Nemožnému jevu pak odpovídá prázdná množina, jistému jevu celé jevové pole Ω .

§10. Pravděpodobnost

Def.: Klasická definice pravděpodobnosti:

Necht' Ω je konečná neprázdná množina stejně možných výsledků daného náhodného pokusu, tzn. Ω je jevové pole. Necht' $A \subseteq \Omega$ je jev. Označme $|A|$, resp. $|\Omega|$ počet prvků množiny A , resp. Ω .

Pak pravděpodobností jevu A nazýváme reálné číslo $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

Pozn.: Zřejmě platí

- a) $P(\emptyset) = 0$
 $P(\Omega) = 1$
- b) Necht' $A, B \subseteq \Omega$ jsou 2 jevy takové, že $A \cap B = \emptyset$, pak platí:
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- c) $\forall A \subseteq \Omega : 0 \leq P(A) \leq 1$

V.10.1.: Necht' $A, B \subseteq \Omega$ jsou jevy. Pak platí:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

[Dk.:]

Pozn.: Vlastnosti z předchozí poznámky (v zesílené verzi pro spočetný počet podmnožin) se užívají k tzv. axiomatické definici pravděpodobnosti, která podmnožině $A \subseteq \Omega$ přiřadí reálné číslo nazývané pravděpodobností, tak aby platily podmínky a), b), c) z předchozí poznámky.

V.10.2.: Necht' $A \subseteq \Omega$ je jev. Pak pro pravděpodobnost opačného jevu $\overline{A}$ platí:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

[Dk.:]

§11. Nezávislé jevy

Def.: Necht' $A, B \subseteq \Omega$ jsou jevy.

Dva jevy A, B nazveme nezávislé $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Pozn.: U nezávislých jevů nemění informace o nastoupení 1. jevu šanci nastoupení 2. jevu.
Tedy výsledek 1. jevu neovlivňuje pravděpodobnost 2. jevu.

V.11.1.: Necht' A, B jsou neslučitelné (= disjunktní) jevy. Pak platí:

Jevy A, B jsou nezávislé $\Leftrightarrow$ alespoň jeden z jevů A a B má nulovou pravděpodobnost.

[Dk.:]

§12. Podmíněná pravděpodobnost

Def.: Necht' $A, B \subseteq \Omega$ jsou jevy takové, že $P(B) > 0$.

Podmíněnou pravděpodobností jevu A za předpokladu nastoupení jevu B nazýváme reálné číslo, dané vzorcem:

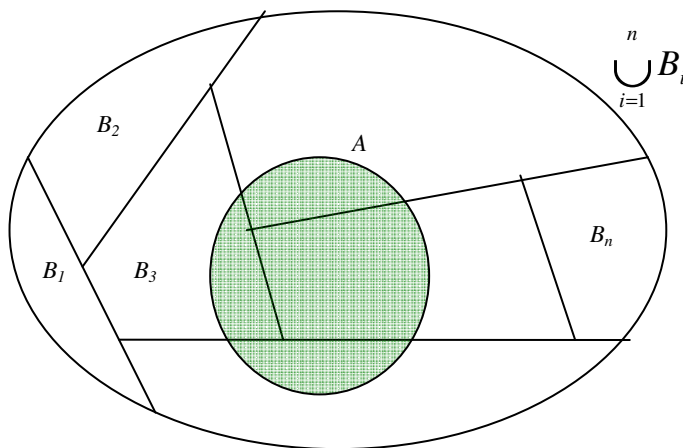
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Pozn.: Jestliže jevy A a B jsou nezávislé, pak:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$$

To znamená, že jevy A, B jsou nezávislé v tom smyslu, že informace o tom, že nastal jev B , nemá žádný vliv na to, že nastal jev A (nemá žádný vliv na pravděpodobnost jevu A).

V.12.1.: Formule úplné pravděpodobnosti



Necht' $A, B_i \subseteq \Omega$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ jsou jevy takové, že $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_i$ a $\forall i \neq j: B_i \cap B_j = \emptyset$ (jsou navzájem po dvou disjunktní).

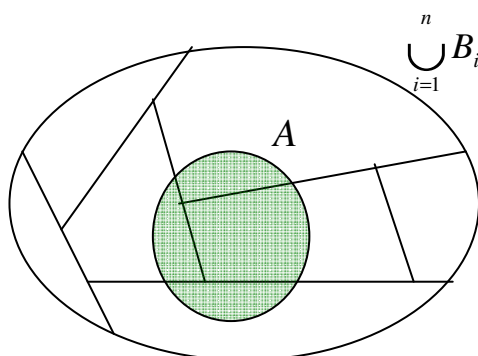
$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A | B_1) + P(B_2) \cdot P(A | B_2) + \dots + P(B_n) \cdot P(A | B_n) = \sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P(A | B_i)$$

[Dk.:]

Pozn.: Jevy $B_1, B_2, \dots, B_n$ tvoří tzv. úplný systém jevů (proto pojem “Formule úplné pravděpodobnosti”)

§13. Bayesův vzorec

V.13.1.: Bayesův vzorec (Bayesova formule)



Nechť $A, B_i \subseteq \Omega$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ jsou takové jevy, že $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_i$,

$\forall i, j, i \neq j: B_i \cap B_j = \emptyset$. Nechť $\exists i \in \{1, 2, \dots, n\}: P(B_i) > 0$. Pak platí:

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}: P(B_k | A) = \frac{P(B_k) \cdot P(A | B_k)}{\sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P(A | B_i)}$$

[Dk.:]

§14. Posloupnost nezávisle opakovaných pokusů

Pozn.: V tomto paragrafu budeme studovat takové pokusy, které mají právě dva výsledky (zdar, nezdar) a budeme zkoumat, jaká je pravděpodobnost toho, že pro n těchto nezávislých pokusů nastane příznivý jev právě k -krát.

V.14.1.: Bernoulliho věta (Bernoulliho rozdělení)

Provádíme-li sérii n nezávislých pokusů, kdy pravděpodobnost úspěšného pokusu je p , pak pro pravděpodobnost toho, že právě k pokusů bude úspěšných, platí:

$$P(k, n) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

[Dk.:]